Chapitre 1

Logique

Plan du chapitre

1 Assertions et prédicats

1.1 Assertion

Définition 1.1 (Assertion, proposition)

Une assertion (ou proposition) est un énoncé auquel on peut attribuer une et une seule valeur logique : soit Vrai (V), soit Faux (F).

Exemple 1.

- “$3^2 = 9$” est une assertion vraie.

- "5 est divisible par 2" est une assertion fausse.
- "77" et "$2+\sqrt{!}=1-$" ne sont pas des assertions : ces énoncés ne sont ni vrai ni faux en soi.

On peut donner un nom à une proposition : on utilise en général les lettres P, Q, R. On écrit par exemple :

$$P : 3^2 \neq 2^3 \qquad Q : \sqrt{4} > 2 \qquad R : \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$$

Parmi les assertions ci-dessus, lesquelles sont vraies ?

Une assertion ne se limite pas à une égalité (signe $=$) ou une inégalité ($\geq$, $\leq$, $>$, $<$, $\neq$). Elle peut contenir beaucoup de mots ! Par exemple :

$$P : \text{"La plus grande solution de l'inéquation } x^2 \leq 2 \text{ est } \sqrt{2}\text{"}$$

1.2 Prédicats

Définition 1.2 (Prédicat)

Un prédicat est une proposition dont la valeur logique dépend de la valeur d'une ou plusieurs variables (en général notées x, y, z...).

On utilise alors une notation similaire aux fonctions : si P est un prédicat qui dépend d'une variable x, on notera $P(x)$ la proposition correspondante.

Exemple 2. On pose

$$P(x) : \sqrt{x}-3 \geq 0$$

Alors $P(1)$ est fausse, $P(100)$ est vraie, et $P(-1)$ n'est pas une assertion (car $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens).

Exemple 3. On pose

$$Q(x,y) : x < y^2$$

Alors

- $Q(2,3)$ est ...
- $Q(1,-1)$ est ...
- $Q(-1,1)$ est ...
- Si x est un réel positif, $Q(x,x)$ est $\begin{cases} \text{vraie} & \text{si ...} \\ \text{fausse} & \text{si ...} \end{cases}$
- Si x est un réel négatif, $Q(x,x)$ est $\begin{cases} \text{vraie} & \text{si ...} \\ \text{fausse} & \text{si ...} \end{cases}$

Un prédicat est donc en quelque sorte une "fonction logique" : à chaque valeur du ou des arguments, on associe la valeur logique Vraie ou Fausse.

2 Opérateurs logiques

Dans ce qui suit, P, Q, R sont des assertions quelconques. Nous allons construire de nouvelles assertions à partir de P, Q, R grâce à des connecteurs (ou opérateurs) logiques. On en verra cinq :

$$\text{non} \qquad \text{et} \qquad \text{ou} \qquad \Longrightarrow \qquad \Longleftrightarrow$$

2.1 La négation (opérateur “non”)

Définition 1.3 (Négation)

La négation de P est une proposition que l'on note “non$P$” ou “$\neg P$”.

- Lorsque P est vraie (V), non$P$ est fausse (F).
- Lorsque P est fausse (F), non$P$ est vraie (V).

On peut résumer ces informations dans une table de vérité :

P	non$P$
F	V
V	F

Exemple 4. La proposition $P : 5 = 2$ est fausse. Sa négation est non$P : 5 \neq 2$ qui est vraie.

Exemple 5. La proposition $P(x) : x > 3$ a pour négation

$$\text{non}P(x) : x \leq 3$$

Si $P(x)$ est vrai, alors non$P(x)$ est faux et réciproquement.

Attention : la négation de $x > 3$ n'est pas $x < 3$: en effet si x vaut 3, les deux assertions sont fausses en même temps. Elles ne peuvent pas donc être la négation l'une de l'autre. Quand on passe à la négation, le symbole $>$ est remplacé par $\leq$ et réciproquement. De même, $<$ est remplacé par $\geq$ et réciproquement.

2.2 La conjonction (opérateur “et”)

Définition 1.4

L'assertion “P et Q” est définie par la table de vérité :

P	Q	P et Q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Autrement dit, si P est vraie ET Q est vraie, alors “P et Q” est vraie. Sinon, elle est fausse.

Exemple 6. L'assertion “$\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$” est vraie.
L'assertion “$x = 2$ et $x = 0$” est fausse.

Exemple 7. On suppose que n est un entier pair. Les assertions suivantes sont-elles (toujours) vraies ?

$$P_1 : \quad \frac{n}{2} \text{ est un entier} \qquad \text{et} \qquad n+1 \text{ est impair}$$

$$P_2 : \quad 2n \text{ est pair} \qquad \text{et} \qquad n \text{ n'est pas impair}$$

$$P_3 : \quad n \text{ est divisible par } 2 \qquad \text{et} \qquad n \text{ n'est pas un nombre premier}$$

2.3 La disjonction (opérateur “ou”)

Définition 1.5

L’assertion “P ou Q” est définie par la table de vérité :

P	Q	P ou Q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Autrement dit, si P est vraie OU si Q est vraie, alors “P ou Q” est vraie. Sinon, elle est fausse.

Remarque. Dans le langage courant, le mot “ou” a plusieurs sens :

- Le *ou exclusif* : dans la phrase

  “Je veux aller à la mer ou à la piscine.”

  il est clair qu’on ne peut pas aller aux deux endroits à la fois, c’est l’un ou l’autre. Cela revient à dire “Je veux aller *ou bien* à la mer, *ou bien* à la piscine”.
- Le *ou inclusif* : dans la phrase

  “Cette clinique accueille des personnes malades ou âgées”

  il est clair que la clinique accueillera également une personne qui est en même temps âgée et malade. Pour lever l’ambiguité, on peut remplacer “ou” par “*et/ou*”.

En mathématiques, le “ou” est sytématiquement un *ou inclusif*.

Exemple 8. L’assertion “$1 = 0$ ou $1 \geq 0$” est vraie.
L’assertion “$1 = 0$ ou $\dfrac{0}{1} = 1$” est fausse.

Exemple 9. On suppose que x est un réel. Les assertions suivantes sont-elles (toujours) vraies ?

$$\begin{aligned} Q_1 &: \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 0 \\ Q_2 &: \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad x \geq 0 \\ Q_3 &: \quad x \leq 0 \quad \text{ou} \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

2.4 L’implication (opérateur $\Longrightarrow$)

Définition 1.6

L’assertion $P \Longrightarrow Q$ se lit “P implique Q”. Elle est définie par la table de vérité :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
F	F	**V**
F	V	**V**
V	F	F
V	V	V

Attention ! Comme on peut le voir, si P est fausse, alors $P \implies Q$ est toujours vraie, ce qu'on peut écrire grossièrement :

$$\text{Faux} \implies \text{"n'importe quoi"} \qquad\qquad \text{est vrai}$$

En réalité, "$P \implies Q$" signifie exactement **"Si P est vraie, alors Q aussi"**. En particulier :

- Si P est vraie et Q est fausse, alors $P \implies Q$ est fausse.
- S'il s'avère que P est fausse, alors l'assertion $P \implies Q$ n'affirme rien : on considère alors qu'elle est vraie. Il s'agit d'une convention [1].

Exemple 10. Soit x un réel. Les assertions suivantes sont vraies :

$$x > 2 \implies x \geq 2$$

$$x \leq 0 \implies 2x \leq x$$

Exemple 11. Soit x un réel. Les assertions suivantes sont *fausses* :

$$x \leq 0 \implies x < 0$$

$$x^2 = x \implies x = 0$$

Remarque. On peut écrire le symbole $\implies$ à l'envers : $P \impliedby Q$ revient à écrire $Q \implies P$.

Exemple 12. Dans ce qui suit, remplacez les pointillés par $\implies$ ou $\impliedby$ pour que l'assertion soit vraie (x et y sont des réels) :

$$\begin{array}{rcl} x^2 \geq 0 & \ldots & x \geq 0 \\ x = y & \ldots & x \neq y+1 \\ x < y & \ldots & y > x \end{array}$$

2.5 Intermède : le "vrai" implicite, CN et CS

Simplification d'écriture Pour alléger le propos, plutôt que d'écrire / lire / dire "P est vraie" on préférera mettre "on a (que) P", voire juste "P". Ainsi, plutôt que de mettre "n est pair est vrai" on pourra se contenter de "n est pair". Ainsi, $P \implies Q$ peut se réécrire :

"Si on a P, alors on a Q"

"Si P, alors Q"

Cela correspond à ce qu'on dit oralement :

$$\text{"Si } \underbrace{n \text{ est pair}}_{P}\text{, alors } \underbrace{n+1 \text{ est impair}}_{Q}\text{"}$$

En résumé, le vrai est implicite : quand on écrit une assertion sans plus de précision, cela signifie qu'elle est vraie [2]. Par contre, si une assertion est fausse, il faut le préciser explicitement (ou juste écrire sa négation, qui est vraie).

1. Une convention est un choix arbitraire de la communauté mathématique. Par exemple, le fait que le chiffre 1 ne soit pas premier est aussi une convention. Le but d'une convention est souvent de simplifier les énoncés des théorèmes. Par exemple, si on supposait que 1 était un nombre premier, il faudrait rajouter des exceptions et des cas particuliers à la plupart des théorèmes sur les nombres premiers.

2. C'est extrêmement important dans la rédaction d'une copie ! Par exemple, dans la phrase "Montrons que f est continue", si on écrit juste "f est continue" sans plus de précision, vous *affirmez* que f est continue. Si cela n'est pas justifié, c'est une affirmation en l'air et cela peut vous pénaliser.

Conditions nécessaires, conditions suffisantes

Lorsque $P \implies Q$ (est vraie) alors on dit que :

- Q est une condition nécessaire (CN) de P : pour avoir P, il faut (nécessairement) avoir Q. Ou encore, on a P seulement si Q.
- P est une condition suffisante (CS) de Q : pour avoir Q, il est suffisant d'avoir P. Ou encore, on a Q si P.

On peut se donner le moyen mnémotechnique suivant :

$$\text{"Suffisant} \implies \text{Nécessaire"}$$

Remarque. Attention, si $Q \implies P$, alors c'est P qui est une CN de Q, et Q qui est une CS de P.

2.6 L'équivalence (opérateur $\iff$)

Définition 1.7

L'assertion "$P \iff Q$" se lit "P est équivalente à Q" ou encore "P si et seulement si Q". Elle est définie par la table de vérité :

P	Q	$P \iff Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

En d'autres termes, on a $P \iff Q$ lorsque P et Q ont la même valeur de vérité (F ou V). En particulier, $Q \iff P$ et $P \iff Q$ signifient la même chose.

Exemple 13. Soit n un entier. Alors

$$n \geq 3 \iff n-3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} n \text{ est pair} &\iff n \text{ est divisible par } 2 \\ &\iff n+1 \text{ est impair} \\ &\iff \frac{n}{2} \text{ est entier} \end{aligned}$$

Ci-dessus, on a écrit une chaine d'équivalences (symboles $\iff$ superposés). C'est comme si on avait tout écrit sur une seule ligne. On peut faire de même avec $\implies$, $=$, $\leq$, etc.

Méthode (Montrer une équivalence par une table de vérité)

Pour montrer l'équivalence entre deux assertions, il suffit de vérifier qu'elles prennent les mêmes valeur de vérité en même temps. On peut le faire avec une table de vérité, cf section suivante.

Attention : la table de vérité repose entièrement sur la logique "pure" pour montrer une équivalence. Ce n'est pas un outil très adapté dans un cas général. En dehors de ce chapitre, son utilisation est marginale.

2.7 Combinaison d'opérateurs

Les opérateurs "non, et, ou, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$" permettent, à partir d'assertions $P, Q, R,$... de construire de nouvelles assertions. Par exemple, "P et Q" est encore une assertion. On peut utiliser plusieurs opérateurs d'affilée, à condition de mettre des parenthèses :

$$(P \text{ et } Q) \Longrightarrow R$$

Ces parenthèses sont importantes pour éviter toute ambiguité. L'assertion ci-dessus n'a pas le même sens que :

$$P \text{ et } (Q \Longrightarrow R)$$

En effet, si P, Q, R sont toutes fausses, la première assertion est vraie (F $\Longrightarrow$ F est vrai) mais la seconde est fausse (F et "n'importe quoi" est faux). Ces deux assertions ne sont donc pas équivalentes puisque dans un cas particulier, elles n'ont pas la même valeur de vérité.

Exemple 14. Soit x un réel.

$$x^2 = 1 \Longrightarrow (x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1)$$

Exemple 15. Soit P une assertion. Alors P et $\text{non}(\text{non}P)$ sont équivalentes. En effet, elles prennent la même valeur de vérité en même temps :

P	non$P$	non(non$P$)
F	V	**F**
V	F	**V**
$\uparrow$		$\uparrow$

Les colonnes marquées par "$\uparrow$" sont identiques pour tous les cas possibles : les assertions P et $\text{non}(\text{non}P)$ sont donc équivalentes.

Propriété 1.8

Soit P, Q deux assertions. Alors l'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ est équivalente à l'assertion "$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$".

Démonstration. On utilise une table de vérité. Il faut d'abord lister tous les cas possibles de valeurs de vérité pour P et Q (à gauche de la double barre verticale) :

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$
F	F				
F	V				
V	F				
V	V				
		$\uparrow$			$\uparrow$

□

Remarque (Condition nécessaire et suffisante (CNS))**.** Lorsque $P \Longleftrightarrow Q$, on dit encore que P est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour Q. Cela vient du fait que

- $Q \Longrightarrow P$ signifie que P est une CN pour Q, ou encore "P si Q"
- $P \Longrightarrow Q$ signifie que P est une CS pour Q, ou encore "P seulement si Q".

C'est aussi de là que vient la terminologie "P si et seulement si Q" pour signifier $P \Longleftrightarrow Q$.

Propriété 1.9

Soit P, Q, R des assertions. Alors :

1. $P \iff \text{non}(\text{non}P)$
2. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff \text{non}P \text{ et } \text{non}Q$
3. $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff \text{non}P \text{ ou } \text{non}Q$
4. $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
5. $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
6. $\text{non}(P \implies Q) \iff P \text{ et } \text{non}Q$

Démonstration. La preuve suit le même principe que ci-dessus avec une table de vérité. Elle est laissée en exercice. □

3 Les quantificateurs

3.1 Quantificateurs $\forall$, $\exists$, $\exists!$

Définition 1.10 (Quantificateurs logiques)

Soit E un ensemble et P un prédicat qui dépend d'une variable x dans E.

- ($\forall$, pour tout) L'assertion
$$\forall x \in E \qquad P(x)$$
est vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de E. “$\forall x \in E$” se lit “pour tout $x \in E$” ou “quel que soit $x \in E$”.
- ($\exists$, il existe) L'assertion
$$\exists x \in E \qquad P(x)$$
est vraie lorsqu'il existe au moins un x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie. “$\exists x \in E$” se lit “il existe $x \in E$ (tel que)”.
- ($\exists!$, il existe un unique) L'assertion
$$\exists! x \in E \qquad P(x)$$
est vraie lorsqu'il existe un ***unique*** x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie. “$\exists! x \in E$” se lit “il existe un ***unique*** $x \in E$ (tel que)”.

Ces quantificateurs sont ***essentiels*** : ils font partie du langage des mathématiques.

Exemple 16.

1. “$\forall x \in [1, +\infty[\qquad x \geq 0$” est vraie.
2. “$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \geq 0$” est faux car ...
3. “$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n^2 \geq n$” est ....
4. “$\exists x \in [1, +\infty[\qquad x \geq 0$” est vraie car ...
5. “$\exists n \in \mathbb{N} \qquad n < 0$” est faux.
6. “$\exists n \in \mathbb{N} \qquad n \leq 0$” est .... car ...
7. “$\exists! x \in \mathbb{R} \qquad x = \pi$” est vraie.
8. “$\exists! x \in \mathbb{R} \qquad x^2 = -1$” est faux car ...
9. “$\exists! n \in \mathbb{R} \qquad n^2 = 1$” est .... car ...

Dans la dernière assertion ci-dessus, on a employé n au lieu de x pour désigner un réel. C'est possible ! On peut remplacer la lettre n par n'importe quel symbole[3] :

$$\exists ! f \in \mathbb{R} \qquad f^2 = 1$$

$$\exists ! \heartsuit \in \mathbb{R} \qquad \heartsuit^2 = 1$$

Toutes les variables ci-dessus $(x, n, f, \heartsuit)$ sont dites muettes.

Propriété 1.11

Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier

$$\begin{aligned} n \text{ est pair} &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \qquad n = 2k \\ n \text{ est impair} &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \qquad n = 2k+1 \end{aligned}$$

3.2 Quantificateurs et négation

Propriété 1.12

- La négation de $\forall x \in E \quad P(x)$ est $\exists x \in E \quad \text{non}P(x)$.
- La négation de $\exists x \in E \quad P(x)$ est $\forall x \in E \quad \text{non}P(x)$.

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont donc échangés en passant à la négation. Il ne faut pas oublier de transformer $P(x)$ en non$P(x)$!

Exemple 17.

L'assertion ...	est (V/F)...	et a pour négation...	qui est donc (V/F)...
$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 0$	V	$\exists n \in \mathbb{N} \quad n < 0$	F
$\exists y \in \mathbb{R} \quad y \neq \pi$			
$\forall a \in [-1,1] \quad a^2 \leq a$			

Remarque. La négation du quantificateur $\exists !$ est plus délicate, on la verra en TD.

3.3 Plusieurs quantificateurs

On peut enchainer plusieurs quantificateurs (liés à des variables différentes) : l'assertion

$$\exists x \in \mathbb{R} \qquad \exists y \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

signifie qu'il existe deux réels x et y qui vérifient le système ci-dessus. En effet, on voit que $x = \dfrac{3}{2}$ et $y = -\dfrac{1}{2}$ conviennent. De même,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad x^2 + n^2 \geq 0$$

est une assertion qui se lit naturellement : quels que soient le réel x et l'entier n qu'on se donne, on a $x^2 + n^2 \geq 0$. Cette assertion est vraie, car x^2 et n^2 étant nécessairement positifs, leur somme l'est aussi.

3. Il y a quand même des exceptions : on ne peut pas écrire $\exists ! \infty \in \mathbb{R} \qquad \infty^2 = 1$ car le symbole ∞ est déjà "réservé" pour désigner l'infini.

Ordre (quantificateurs identiques)

Lorsqu'il y a deux quantificateurs identiques *consécutifs* (deux $\forall$ ou deux $\exists$), on peut les échanger sans changer le sens de l'assertion en question. Ainsi, toutes ces écritures sont équivalentes :

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad P(x,y) \\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x,y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad P(x,y) \\ \forall x,y \in \mathbb{R} \quad P(x,y) \end{array}$$

et de même, avec deux $\exists$. La dernière formulation est un peu particulière et peu usitée en CPGE. Elle permet d'aller plus vite lorsque les deux variables appartiennent au même ensemble (ici $\mathbb{R}$).

Ordre (quantificateurs différents)

Les assertions ci-dessous n'ont pas la même signification :

$$P: \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad 2y = x$$

$$Q: \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 2y = x$$

Leur lecture est assez naturelle :

1. Dans P, le quantificateur $\exists y$ se trouve **après** $\forall x$: cela signifie que la variable y **peut dépendre de** x. Ainsi, P signifie que pour tout x (fixé) qu'on se donne, il existe un y (qui peut dépendre de x) vérifiant $2y = x$. Un tel y existe bien, on peut prendre $y = \frac{x}{2}$, qui est bien dans $\mathbb{R}$. P est donc vraie.
2. Dans Q, le quantificateur $\exists y$ se trouve **avant** $\forall x$: cela signifie que la variable y **doit être posée indépendamment de** x. Ainsi, Q signifierait qu'il existe un réel y (indépendant de x) tel que pour tout réel x, on a $2y = x$. Supposons par l'absurde [4] que Q est vraie, donc qu'un tel réel y existe. Alors :
   (a) Avec $x = 0$, cela entraine $2y = 0$, donc $y = 0$.
   (b) Avec $x = 1$, cela entraine $2y = 1$, donc $y = \frac{1}{2}$.

   On a donc $0 = y = \frac{1}{2}$, d'où $0 = \frac{1}{2}$. Contradiction. Donc Q est fausse.

Propriété 1.13

Avec un quantificateur $\exists z(\dots)$, la variable z peut dépendre de toutes les variables situées *avant* le quantificateur $\exists z(\dots)$, mais est indépendante des autres variables situées *après* ce même quantificateur.
La règle est identique avec $\exists! z(\dots)$

Par exemple dans

$$\exists x \dots \quad \forall y \dots \quad \exists! z \dots \quad \forall t \dots \quad P(x,y,z,t)$$

- La variable x ne peut pas dépendre de y, z, t.
- (L'unique) valeur de z peut dépendre de x et y, mais pas de t.
- Pour y et t, le quantificateur est $\forall$ donc la proposition doit être vérifiée quelle que soit la valeur permise. Il n'y a donc pas lieu de dire que y ou t dépende d'autres variables.

Remarque. Dans l'exemple ci-dessus, on ne peut échanger aucun des quantificateurs sans changer le sens de l'assertion. On ne peut échanger l'ordre que de deux quantificateurs *identiques* et *consécutifs*.

4. Cf section 4.6 pour plus de détails sur le raisonnement par l'absurde.

Négation avec plusieurs quantificateurs

On reprend l'assertion (fausse)

$$Q : \qquad \exists y \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad 2y = x$$

On souhaite écrire non$Q$. Bien qu'il y ait plusieurs quantificateurs, la méthode est identique : on inverse chaque quantificateur puis on passe à la négation dans l'assertion finale. Ainsi,

non$Q$:

Expliquer pourquoi cette assertion est vraie (sans utiliser le fait que Q est fausse).

4 Les raisonnements

4.1 Montrer une implication – Contraposée

Méthode (Montrer une implication)

Pour montrer $P \implies Q$, on peut ou bien faire une preuve "directe", par implications successives, par exemple :

$$\begin{aligned} P &\implies \ldots \\ &\implies \ldots \\ &\implies Q \end{aligned}$$

Ou bien, on peut raisonner par contraposée (cf ci-dessous).

Propriété 1.14 (Contraposée)

Soit P, Q deux assertions. L'assertion $P \implies Q$ est équivalente à l'assertion :

$$\text{non}Q \implies \text{non}P$$

L'assertion non$Q \implies$ non$P$ est appelée la contraposée de l'assertion $P \implies Q$.

Démonstration. Avec une table de vérité. □

Exemple 18. Soit x, y deux réels. Montrer que $xy = 1 \implies x \neq 0$.

4.2 Montrer une équivalence – Double implication

Méthode

Pour montrer $P \iff Q$, on peut ou bien faire une preuve "directe", par équivalences successives, par exemple :

$$\begin{aligned} P &\iff \ldots \\ &\iff \ldots \\ &\iff Q \end{aligned}$$

Ou bien, on peut raisonner par <u>double implication</u> : montrer que $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

Exemple 19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est pair $\iff n^2$ est pair.

Méthode

Pour montrer $A \iff B \iff C$, on peut faire des implications "circulaires" :

- On montre $A \implies B$.
- On montre $B \implies C$.
- On montre $C \implies A$.

4.3 Faire une disjonction de cas

Lorsqu'on souhaite montrer une assertion, il est parfois plus simple de "découper le problème".

- Si on veut montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$, il suffit de montrer que $P(n)$ est vraie lorsque n est pair et lorsque n est impair (car tout entier naturel est pair ou impair).

- Plus généralement, si on veut montrer $\forall x \in E \qquad P(x)$, et que l'ensemble E peut être "découpé" en un ensemble E_1 et un ensemble E_2, alors

$$(\,\forall x \in E \qquad P(x)\,) \iff \begin{cases} \forall x \in E_1 \qquad P(x) \\ \forall x \in E_2 \qquad P(x) \end{cases}$$

  Remarque : l'accolade ci-dessus a la même signification qu'un "et".

Exemple 20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n$ est pair.

4.4 Raisonner par récurrence

Une récurrence sert à montrer une assertion de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(n)$$

Dans ce cours, on notera plutôt H_n plutôt que $P(n)$. Le but est donc de montrer que H_n est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Méthode (Récurrence simple)

Un raisonnement par récurrence simple est constitué de 3 étapes.

1. Initialisation : on vérifie que H_0 est vraie.
2. Hérédité : pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que H_n est vraie, et on montre que H_{n+1} l'est aussi. Autrement dit, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad H_n \implies H_{n+1}$$

   Pendant cette étape, l'assertion H_n est appelée *hypothèse de récurrence*.
3. Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

Exemple 21. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq n$.

Parfois, supposer seulement H_n ne suffit pas pour démontrer H_{n+1}. Dans ce cas, on peut recourir à des récurrences plus "puissantes" que la récurrence simple :

- Récurrence double : on initialise en prouvant H_0 ***et*** H_1. Puis pour un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on montre

$$(H_n \text{ et } H_{n+1}) \implies H_{n+2}$$

  Ici, l'hypothèse de récurrence est ainsi "H_n et H_{n+1}". On dispose donc d'un indice de plus pour passer au suivant.

- Récurrence forte : on initialise en prouvant H_0. Puis pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on montre

$$(H_0 \text{ et } H_1 \text{ et } H_2 \text{ et } \dots \text{ et } H_n) \implies H_{n+1}$$

  Dans ce cas, on dispose de tous les indices qu'on a déjà traités pour passer au suivant.

Remarque (Commencer à un indice donné)**.** Que ce soit la récurrence simple, double ou forte, si on veut montrer H_n seulement pour $n \geq 1$, alors on peut "commencer" une récurrence à l'indice 1 plutôt que 0. Pour l'initialisation, on montre H_1 (et H_2 pour une récurrence double), puis pour l'hérédité on se donne un entier $n \geq 1$ plutôt que $n \in \mathbb{N}$. De même, on peut commencer à l'indice 2, 3, etc.

4.5 Donner un contre-exemple

On veut montrer qu'une assertion de la forme "$\forall x \in E \qquad P(x)$" est *fausse*. Il suffit pour cela de trouver un élément $x_0 \in E$ pour lequel $P(x_0)$ est fausse. Il suffit d'en trouver un seul !

Exemple 22. L'assertion "$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x(1-x) \leq 0$" est-elle vraie ?

La négation de "$\forall x \in E \qquad P(x)$" est

$$\text{“}\exists x \in E \qquad \text{non}P(x)\text{”}$$

Le contre-exemple consiste donc à montrer que cette assertion est vraie en trouvant un élément $x_0 \in E$ tel que non$P(x_0)$ soit vrai.

4.6 Raisonner par l'absurde

Méthode (Raisonnement par l'absurde)

On souhaite montrer qu'une assertion P est vraie.

1. On suppose par l'absurde que P est fausse, donc que non$P$ est vraie.
2. On montre ensuite par une ou plusieurs implications que
$$\text{non}P \implies \dots \implies Q$$
avec Q une assertion *fausse*.
3. On obtient alors une *contradiction logique* : cela signifie que la supposition de l'étape 1, à savoir que P est fausse, est incorrecte. Ainsi, P est vraie.

La contradiction vient du fait que l'implication non$P \implies$ Faux est vraie (on l'a démontré à l'étape 2). Si non$P$ était vraie (étape 1), alors on aurait que Vrai $\implies$ Faux est vraie, ce qui n'est pas possible. Donc forcément non$P$ est fausse [5].

Exemple 23. La proposition Q de la section 3.3 a été réfutée en raisonnant par l'absurde.

Exemple 24 (Principe des tiroirs)**.** Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose qu'on a rangé $n+1$ chaussettes au hasard dans n tiroirs. Montrer que nécessairement, un des tiroirs contient au moins deux chaussettes.

4.7 Raisonner par analyse-synthèse

On considère une assertion $P(x)$ qui dépend d'une variable $x \in E$. On souhaite déterminer TOUTES les valeurs de x dans E pour lesquelles $P(x)$ est vraie.

Bien souvent, $P(x)$ est une équation dont on cherche toutes les solutions appartenant à un ensemble E.

Méthode (Raisonnement par analyse-synthèse)

En reprenant les notations ci-dessus, les étapes sont les suivantes :

1. Analyse : on suppose qu'il existe un $x \in E$ qui vérifie $P(x)$. On détermine des *conditions nécessaires* que x doit vérifier. Ainsi, on montre $P(x) \implies x \in F$, avec F un sous-ensemble de E à préciser.
2. Synthèse : l'ensemble F donne une liste de "candidats" possibles. On vérifie au cas par cas pour chaque $x \in F$ s'il vérifie effectivement $P(x)$.
3. Conclusion : on donne l'ensemble de toutes les solutions trouvées, qu'on note $\mathcal{S}$.

5. En particulier, l'implication montrée à l'étape 2 se résume donc à Faux $\implies$ Faux, ce qui au final est inutile.

Exemple 25. Résoudre l'équation $x+1=\sqrt{2x+5}$ dans $\mathbb{R}$.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

a) **Pour montrer une implication** $P \implies Q$**.** On peut raisonner par implications successives ou par contraposée (càd montrer non$Q \implies$ non$P$).

b) **Pour montrer une équivalence** $P \iff Q$**.** On peut raisonner par équivalences successives ou par double implication (càd montrer $P \implies Q$ puis $Q \implies P$).

c) **Pour montrer qu'un objet «ne vérifie pas» une propriété.** Il est fréquent de raisonner par l'absurde : s'il vérifiait cette propriété, alors [...] contradiction.

d) **Pour montrer une propriété du type** $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$**.** On peut essayer de le montrer directement ou bien par récurrence. Si l'utilisation de $P(n)$ permet de montrer facilement $P(n+1)$, alors une récurrence simple est adaptée (et de manière similaire pour double, forte). Une suite définie par une relation de récurrence se prête bien à un raisonnement par récurrence.